**\_ \_\_\_\_\_**

**/ |\_\_\_ /**

**| | |\_ \**

**| |\_\_\_) |**

**|\_|\_\_\_\_/**

**\_\_\_\_\_ \_\_**

**|\_ \_|\_\_ \_\_\_ \_ \_\_/\_/ \_\_ \_**

**| |/ \_ \/ \_ \| '\_\_| |/ \_` |**

**| | \_\_/ (\_) | | | | (\_| |**

**|\_|\\_\_\_|\\_\_\_/|\_| |\_|\\_\_,\_|**

**\_ \_\_\_\_ \_**

**\_\_| | \_\_\_ / \_\_\_|\_\_\_ | | \_\_ \_ \_\_\_**

**/ \_` |/ \_ \ | | / \_ \| |/ \_` / \_\_|**

**| (\_| | \_\_/ | |\_\_| (\_) | | (\_| \\_\_ \**

**\\_\_,\_|\\_\_\_| \\_\_\_\_\\_\_\_/|\_|\\_\_,\_|\_\_\_/**

**Contenido**

**=========**

**1. Introducción.**

**2. Componentes de un Sistema de Colas.**

**3. Comportamiento del Cliente.**

**4. Comportamiento del Servidor.**

**5. Supuestos de Trabajo.**

**6. Un Cola de Ejemplo.**

**7. Un Sistema M/M/1 y +oo/FIFO.**

**8. Un Primer Ejemplo.**

**9. Un Segundo Ejemplo.**

**10. Un Tercer Ejemplo.**

**11. Un Cuarto Ejemplo.**

**12. Un Quinto Ejemplo.**

**13. Un Sistema M/M/1 y N/FIFO.**

**14. Un Primer Ejemplo.**

**15. Un Sistema M/M/S y +oo/FIFO.**

**16. Un Primer Ejemplo.**

**17. Un Segundo Ejemplo.**

**18. Un Sistema M/Ek/1 y +oo/FIFO.**

**19. Un Primer Ejemplo.**

**20. Un Segundo Ejemplo.**

**21. Un Sistema M/Ek/1 con k -> +oo.**

**22. Un Primer Ejemplo.**

**23. Resumen.**

**24. Ejercicios.**

**1. Introducción.**

**================**

**Los problemas donde se debe realizar una fila para recibir un servicio, conocidos como problemas de colas, son los problemas más frecuentes en la vida real. Existen colas para la biblioteca, la librería, la cafetería, etc. Algunas colas son algo diferentes, juicios legales esperando realizarse en una corte, emergencias médicas por atenderse, incendios que deben apagarse, etc. Y otras son virtuales, procesos, peticiones a los discos o dispositivos de un computador, paquetes en "internet", etc.**

**Lo que tienen en común todas estas actividades es la llegada de objetos que requieren de un servicio. En el momento de la llegada el servidor puede estar disponible u ocupado, en este último caso se deberá esperar en fila para recibir el servicio.**

**Las líneas de espera no pueden desaparecer, pero existen técnicas para reducir el tiempo de espera del objeto en el sistema. Un tiempo de espera demasiado largo puede ocasionar pérdidas de clientes a la compañía. Para reducir el tiempo de espera se pueden buscar servidores más eficientes o instalar un mayor número de servidores, estas medidas pueden ocasionar un incremento en los costos.**

**Para resolver estos problemas es que se ha desarrollado la teoría de colas. Se debe buscar un balance entre el costo incurrido por la posible pérdida de clientes y el costo de proveer el servicio.**

**La teoría de colas está basada en fórmulas matemáticas que surgen de los problemas donde un flujo de clientes buscan recibir un servicio. Se busca minimizar el tiempo de espera de los clientes a la vez que se minimiza el costo de inversión en los servidores.**

**2. Componentes de un Sistema de Colas.**

**======================================**

**A continuación se mencionan los principales componentes de un sistema de colas.**

**() Fuente de Entrada.**

**La fuente de entrada del sistema es la que genera los clientes. La característica más importante de la fuente de entrada es su tamaño. Puede ser finita o infinita. Los cálculos suelen ser mucho más sencillos para el caso infinito, por lo que se suele hacer esta suposición cuando se trata de poblaciones de clientes relativamente grandes. La segunda característica más importante es el patrón estadístico que representa el comportamiento de la fuente. Usualmente se trata de una distribución Poisson o Exponencial.**

**() Cola.**

**Se caracteriza por el máximo número de objetos que puede contener. Las colas pueden ser finitas o infinitas.**

**() Disciplina de Servicio.**

**Se refiere a la forma en que se seleccionan a los miembros de la cola para brindarles el servicio. La disciplina más común es aquella en que se atiende al primero que llega. A continuación se enumeran las disciplinas más comunes.**

**FIFO "first in first out"**

**LIFO "last in first out"**

**SRO "service in random order"**

**PRI "priority system"**

**() Mecanismo de Servicio.**

**La especificación del mecanismo de servicio debe incluir una descripción del tiempo que tarda el servidor en brindar el servicio así como del número de servidores disponibles. En caso de que exista más de un servidor, se debe establecer como fluyen los clientes de un servidor a otro. Los sistemas más elementales de colas suelen tener una cola con un solo servidor, o un grupo de servidores que atienden la misma cola. A continuación se muestran los diagramas de distribución más comunes entre colas y servidores.**

**Una cola, un servidor.**

**ooooo --> S1**

**Una cola, servidores en fase.**

**ooooo --> S1 --> S2 --> S3**

**Una cola, múltiples servidores.**

**.--> S1**

**ooooo |**

**'--> S2**

**Una cola, múltiples servidores en fase.**

**.--> S1 --> S2**

**ooooo |**

**'--> S3 --> S4**

**Colas en paralelo:**

**ooooo --> S1**

**ooooo --> S2**

**ooooo --> S3**

**3. Comportamiento del Cliente.**

**==============================**

**El cliente puede exhibir las siguientes conductas inusuales.**

**() No ingreso.**

**Un cliente puede negarse a ingresar a la cola debido a que le parece muy larga y deberá esperar demasiado por el servicio.**

**() Abandonar.**

**Un cliente que ya ingresó a la cola puede escoger retirarse de esta, después de haber permanecido algún tiempo, debido a que deberá esperar demasiado.**

**() Cambio de fila.**

**Cuando existen varias colas, el cliente puede moverse de una cola a otra en espera de recibir el servicio de manera más rápida.**

**() Colusión.**

**Un grupo de clientes puede cooperar de manera que solo uno se encuentra en la fila y permitirá que los demás reciban el servicio.**

**() Montaje.**

**Cuando un grupo de clientes coopera de manera que cada uno hace fila en colas diferentes para acelerar el proceso y ser atendido.**

**4. Comportamiento del Servidor.**

**===============================**

**El servidor puede exhibir las siguientes conductas inusuales.**

**() Falla.**

**El servicio puede verse interrumpido debido a una falla en el sistema y el servidor no puede proveer el servicio.**

**() Cambio de tasa de atención.**

**Un servidor puede acelerar o disminuir la tasa a la cual atiende a los clientes dependiendo del tamaño de la cola. Por ejemplo, si la cola es muy larga puede apresurarse cuando atiende a los clientes, si la cola es muy corta puede tardar más atendiendo a los clientes.**

**() Cansancio o desgaste.**

**Un servidor puede cansarse y por lo tanto disminuir su tasa de atención. Si se trata de un servidor mecánico, debido a un desgaste puede volverse más lento para atender a los clientes.**

**() Procesamiento en lotes.**

**Un servidor puede tratar de atender al mismo tiempo a más de un cliente a la vez.**

**5. Supuestos de Trabajo.**

**========================**

**A lo largo de esta sección, cuando se trabaje con los sistemas de colas se mantendrán los siguientes supuestos:**

**() La población y por lo tanto la fuente de ingreso es infinita.**

**() No hay ningún comportamiento inusual en los clientes.**

**() La disciplina de servicio será FIFO.**

**() No hay ningún comportamiento inusual en los servidores.**

**() El número de clientes que llega al sistema tiene una distribución Poisson con una tasa media de "L" clientes que llegan por unidad de tiempo.**

**() El tiempo de servicio tiene una distribución exponencial con una tasa media de servicio de "M" clientes atendidos por unidad de tiempo.**

**() La tasa media de llegada es menor que la tasa media de servicio, es decir "L < M". En general cuando esto ocurre se supone que el sistema de colas llegará a un estado estable para analizarlo. Este se suele llamar el factor de utilización de la cola.**

**L/M < 1**

**Si hay "S" servidores:**

**L/(S\*M) < 1**

**Las entradas a un sistema de colas se suelen comportar de acuerdo a un modelo Poisson. La distribución Poisson tiene las siguientes características:**

**L^x \* e^(-L)**

**p(x) = ------------ para x = 0,1,2,3,...**

**x!**

**E(x) = L**

**V(x) = L**

**DE(x) = sqrt( L )**

**Al graficar esta distribución se obtiene:**

**|**

**| \_\_**

**| | |**

**| \_\_| |**

**| | | |**

**| | | |**

**| | | |**

**| | | |\_\_**

**| | | | |**

**|\_\_| | | |**

**| | | | |\_\_**

**| | | | | |**

**| | | | | |\_\_**

**| | | | | | |\_\_**

**|\_\_|\_\_|\_\_|\_\_|\_\_|\_\_|\_\_|\_\_\_\_\_\_**

**0 1 2 3 4 5 6**

**El tiempo de servicio suele tener una distribución exponencial. La distribución exponencial tiene las siguientes características.**

**/ (1/B) \* e^(-x/B) si x > 0**

**f(x) = (**

**\ 0 si x < 0**

**E(x) = B**

**V(x) = B^2**

**DE(x) = B**

**Se representa mediante el siguiente gráfico.**

**f(x)**

**|**

**|**

**|**

**1/B.**

**| .**

**|**

**| .**

**| .**

**| .**

**| .**

**| .**

**| .**

**|\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**6. Un Cola de Ejemplo.**

**=====================**

**A continuación se muestra un ejemplo típico del funcionamiento de una cola. Observe como las llegadas y tiempo de servicio varían grandemente. Supondremos que este sistema de colas funciona desde las 8:00 horas hasta las 15:00 horas. En general, para evitar las variaciones que se presentan en los sistemas de colas se suele trabajar con los promedios de estas distribuciones.**

**Primero está el número de llegada, la hora a la que llega, cuando inicia el servicio y cuando finaliza el servicio. De esta cola se estudiarán los siguientes elementos:**

**L: longitud de la cola sin tomar en cuenta a la persona que recibe servicio.**

**TLle: Tiempo entre llegadas.**

**TSe: Tiempo de servicio de un cliente.**

**TE: Tiempo de espera por el servicio**

**-----------------------------------------------------**

**Hora Ini Fin |**

**No. Lleg. Serv Serv | L TLle TSe TE**

**----------------------------|------------------------**

**0 8:00 -- -- |**

**1 8:07 8:07 8:13 | 0 7 6 0**

**2 8:11 8:13 8:28 | 1 4 15 2**

**3 8:19 8:28 8:40 | 1 8 12 9**

**4 8:46 8:46 8:58 | 0 27 12 0**

**5 9:06 9:06 9:22 | 0 20 16 0**

**6 9:49 9:49 9:56 | 0 43 7 0**

**7 9:51 9:56 10:11 | 1 2 15 5**

**8 10:06 10:11 10:21 | 1 15 10 5**

**9 11:24 11:24 11:30 | 0 78 6 0**

**10 11:31 11:31 11:47 | 0 7 16 0**

**11 11:35 11:47 12:04 | 1 4 17 12**

**12 11:41 12:04 12:19 | 2 6 15 23**

**13 11:52 12:19 12:35 | 2 11 16 27**

**14 12:02 12:35 12:48 | 3 10 13 33**

**15 12:12 12:48 13:07 | 3 10 19 36**

**16 12:39 13:07 13:24 | 2 27 17 28**

**17 12:40 13:24 13:40 | 3 1 16 44**

**18 12:45 13:40 13:49 | 4 5 9 55**

**19 12:59 13:49 13:59 | 4 14 10 50**

**20 13:02 13:59 14:06 | 5 3 7 57**

**21 13:29 14:06 14:16 | 4 27 10 37**

**22 13:42 14:16 14:23 | 4 13 7 34**

**23 13:46 14:23 14:34 | 5 4 11 37**

**24 13:48 14:34 14:46 | 6 2 12 46**

**25 13:52 14:46 14:58 | 6 4 12 54**

**26 13:54 14:58 15:10 | 7 2 12 64**

**27 14:15 15:10 15:18 | 6 21 8 55**

**28 14:18 15:18 15:30 | 6 3 12 60**

**29 14:23 15:30 15:39 | 6 5 9 67**

**30 14:50 15:39 15:50 | 5 27 11 49**

**31 15:07 -- -- |**

**-----------------------------------------------------**

**Promedio 2.93 13.66 11.93 29.63**

**----------------------------------------------------**

**En la tabla siguiente se presenta la información generada por este ejemplo así como la información del sistema original del cual se generaron estos datos.**

**------------------------------------------------------**

**Medida Ejemplo Realidad**

**------------------------------------------------------**

**Largo promedio de la cola 2.93 2.00 personas**

**Tiempo entre llegadas 13.66 15.00 minutos**

**Tiempo de servicio 11.93 12.00 minutos**

**Tiempo de espera 29.63 48.00 minutos**

**------------------------------------------------------**

**7. Un Sistema M/M/1 y +oo/FIFO.**

**===============================**

**Un sistema M/M/1 es un sistema que tiene una entrada que se comporta de acuerdo a una distribución Poisson, tiempo de servicio que se comporta de acuerdo a una distribución exponencial, con un único servidor. La letra "M" se utiliza para designar estos procesos probabilísticos, también conocidos como "markovianos".**

**La designación de +oo/FIFO indica que la capacidad de la cola se considerará inifinita con un servicio FIFO "first in first out". De esta forma se atiende en orden estricto de llegada. El primero en llegar será el primero en ser atendido.**

**A continuación se presentan las fórmulas que se utilizan para el cálculo en estos sistemas. La "L" representa la tasa de entrada Poisson y la "M" la tasa de salida que se obtiene al convertir una función exponencial en un función Poisson. En general todas las fórmulas esperan una tasa Poisson de entrada y una tasa Poisson de salida con la misma unidad de tiempo.**

**Fórmulas:**

**Factor de utilización:**

**r = L/M**

**Probabilidad que haya 0 personas en la cola:**

**P0 = 1 - (L/M)**

**Largo promedio de la cola:**

**L^2**

**Lq = ------**

**M(M-L)**

**Número promedio de clientes en el sistema:**

**L**

**Ls = -----**

**M-L**

**Tiempo promedio de espera para ser atendido:**

**L**

**Wq = ------**

**M(M-L)**

**Tiempo promedio de espera en el sistema:**

**1**

**Ws = -----**

**M-L**

**La probabilidad que hayan n personas en la cola está dada por:**

**Pn = r^n \* P0**

**Relaciones entre Lq, Ls, Wq y Ws.**

**---------------------------------**

**Se presentan las siguientes relaciones:**

**() r = L / (S \* M)**

**() Lq = L \* Wq**

**() Ls = L \* Ws**

**() Ls = Lq + r**

**() Wq = Lq / L**

**() Ws = Ls / L**

**() Ws = Wq + 1/M**

**8. Un Primer Ejemplo.**

**=====================**

**Los estudiantes llegan a la biblioteca de acuerdo a un proceso Poisson con una media de 40 por hora. La tasa de servicio para atender a un estudiante tiene una distribución Poisson con una media de 50 por hora. Si los estudiantes son atendidos por una sola persona, encuentre el tiempo promedio para que un estudiante sea atendido.**

**R/**

**Se tiene que:**

**L = 40 por hora**

**M = 50 por hora**

**(1) Y se desea calcular el tiempo promedio para que un estudiante sea atendido. Que se puede estimar mediante el valor de Wq.**

**L**

**Wq = ------**

**M(M-L)**

**40**

**Wq = ---------**

**50(50-40)**

**Wq = 2/25 horas**

**Wq = 0.08 horas**

**Wq = 4.80 minutos**

**Wq = 4 minutos y 48 segundos.**

**9. Un Segundo Ejemplo.**

**======================**

**La estación de trenes cuenta con una sola ventanilla para la venta de tiquetes. En la mañana los clientes llegan a una tasa de 10 por hora. El tiempo promedio que tarda un cliente en ser atendido es de 5 minutos, es decir, el número promedio de clientes que puede ser atendido es de 12 por hora. Encuentre**

**(1) La probabilidad que la ventanilla esté vacía.**

**(2) El número promedio de clientes en la cola.**

**R/**

**Por los datos se tiene:**

**L = 10 por hora**

**M = 12 por hora**

**(1) Probabilidad que la ventanilla esté vacía.**

**P0 = 1 - (L/M)**

**P0 = 1 - (10/12)**

**P0 = 1/6 de probabilidad**

**P0 = 0.1667 de probabilidad**

**(2) El número promedio de clientes en la cola.**

**L^2**

**Lq = ------**

**M(M-L)**

**10^2**

**Lq = ---------**

**12(12-10)**

**Lq = 25/6 clientes**

**Lq = 4 1/6 clientes**

**Lq = 4.1667 clientes**

**10. Un Tercer Ejemplo.**

**=====================**

**En una gasolinera pequeña que tiene un único dispensador de gasolina, los clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson con un tiempo promedio de 5 minutos entre llegadas. El tiempo de servicio está distribuido exponencialmente con una media de 2 minutos. Con esta información se desea establecer:**

**(1) El largo promedio de la cola.**

**(2) El número de clientes en el sistema.**

**(3) El tiempo promedio de un vehículo antes de recibir gasolina.**

**(4) El tiempo promedio de un vehículo en la gasolinera.**

**R/**

**De acuerdo a los datos se tiene que:**

**L = 12 clientes por hora**

**M = 30 clientes por hora**

**(1) El largo promedio de la cola:**

**L^2**

**Lq = ------**

**M(M-L)**

**12^2**

**Lq = ---------**

**30(30-12)**

**Lq = 4/15 clientes**

**Lq = 0.2666... clientes**

**(2) El número promedio de clientes en el sistema:**

**L**

**Ls = -----**

**M-L**

**12**

**Ls = -------**

**30-12**

**Ls = 2/3 clientes**

**Ls = 0.6666... clientes**

**(3) El tiempo promedio de un vehículo antes de recibir gasolina.**

**L**

**Wq = ------**

**M(M-L)**

**12**

**Wq = ---------**

**30(30-12)**

**Wq = 1/45 horas**

**Wq = 0.0222... horas**

**Wq = 1.3333... minutos**

**Wq = 1 minuto y 20 segs**

**(4) El tiempo promedio de un vehículo en la gasolinera.**

**1**

**Ws = -----**

**M-L**

**1**

**Ws = -----**

**30-12**

**Ws = 1/18 horas**

**Ws = 0.0555... horas**

**Ws = 3.3333... minutos**

**Ws = 3 minutos 20 segs**

**11. Un Cuarto Ejemplo.**

**=====================**

**Un banco está considerando instalar un cajero automático en una nueva área comercial. Los estudios indican que los clientes llegan a una tasa de 15 por hora. El cajero automático, de acuerdo a los estudios del fabricante, puede atender un cliente cada 3 minutos. Suponiendo entradas tipo Poisson y que el cajero atiende de acuerdo a una distribución exponencial se solicita calcular:**

**(1) Número promedio de clientes en la cola.**

**(2) Número promedio de clientes en el sistema.**

**(3) Tiempo de espera en la cola.**

**(4) Tiempo de espera en el sistema.**

**R/**

**Se tiene que:**

**L = 15 por hora**

**M = 20 por hora**

**(1) Número promedio de clientes en la cola.**

**L^2**

**Lq = ------**

**M(M-L)**

**15^2**

**Lq = ---------**

**20(20-15)**

**Lq = 9/4 clientes**

**Lq = 2 1/4 clientes**

**Lq = 2.25 clientes**

**(2) Número promedio de clientes en el sistema.**

**L**

**Ls = -----**

**M-L**

**15**

**Ls = ------**

**20-15**

**Ls = 3 clientes**

**(3) Tiempo de espera en la cola.**

**L**

**Wq = ------**

**M(M-L)**

**15**

**Wq = ---------**

**20(20-15)**

**Wq = 3/20 horas**

**Wq = 0.15 horas**

**Wq = 9 minutos**

**(4) Tiempo de espera en el sistema.**

**1**

**Ws = -----**

**M-L**

**1**

**Ws = -----**

**20-15**

**Ws = 1/5 horas**

**Ws = 0.20 horas**

**Ws = 12 minutos**

**12. Un Quinto Ejemplo.**

**=====================**

**En un local de ventas se cuenta con solamente un cajero. Durante las horas pico los clientes llegan a una tasa de 10 por hora. El número promedio de clientes que puede atender el cajero es de 12 por hora. Se solicita encontrar la siguiente información.**

**(1) Probabilidad que el cajero esté desocupado.**

**(2) Número promedio de clientes en la cola.**

**(3) Número promedio de clientes en el sistema.**

**(4) Tiempo promedio de los clientes en la cola.**

**(5) Tiempo promedio de los clientes en el sistema.**

**R/**

**Se tiene la información:**

**L = 10 por hora**

**M = 12 por hora**

**(1) Probabilidad que el cajero esté desocupado.**

**P0 = 1 - (L/M)**

**P0 = 1 - (10/12)**

**P0 = 1 - (5/6)**

**P0 = 1/6**

**P0 = 0.1666...**

**(2) Número promedio de clientes en la cola.**

**L^2**

**Lq = ------**

**M(M-L)**

**10^2**

**Lq = ---------**

**12(12-10)**

**Lq = 25/6 clientes**

**Lq = 4 1/6 clientes**

**Lq = 4.1666... clientes**

**(3) Número promedio de clientes en el sistema.**

**L**

**Ls = -----**

**M-L**

**10**

**Ls = -------**

**12-10**

**Ls = 5 clientes**

**(4) Tiempo promedio de los clientes en la cola.**

**L**

**Wq = ------**

**M(M-L)**

**10**

**Wq = ----------**

**12(12-10)**

**Wq = 5/12 horas**

**Wq = 0.41666... horas**

**Wq = 25 minutos**

**(5) Tiempo promedio de los clientes en el sistema.**

**1**

**Ws = -----**

**M-L**

**1**

**Ws = -----**

**12-10**

**Ws = 1/2 hora**

**Ws = 30 minutos**

**13. Un Sistema M/M/1 y N/FIFO.**

**==============================**

**Este es un sistema de colas con entradas Poisson, tiempo de servicio exponencial, con un único servidor. Sin embargo en este sistema la cola tiene una capacidad finita y pueden hacer fila únicamente "N" objetos. Los objetos se atienden de acuerdo a un mecanismo de FIFO.**

**Fórmulas:**

**Factor de utilización:**

**r = L/M**

**Probabilidad que hayan 0 objetos en la cola:**

**1-r**

**P0 = -----------**

**1 - r^(N+1)**

**Número de objetos en el sistema:**

**/ r \ / (N+1) \* r^(N+1) \**

**Ls = ( ----- ) - ( --------------- )**

**\ 1 - r / \ 1 - r^(N+1) /**

**Número de objetos en la cola:**

**Lq = Ls - r**

**Tiempo de espera en la cola:**

**Wq = Lq / L**

**Tiempo de espera en el sistema:**

**Ws = Ls / L**

**14. Un Primer Ejemplo.**

**======================**

**Los estudiantes de una universidad llegan a la oficina de admisión y registro de acuerdo a una distribución Poisson con una tasa de 30 por día. El tiempo promedio que se requiere para atender a un estudiante tiene una distribución exponencial con una media de 12 minutos. El horario de trabajo de la oficina es de 8 horas al día de manera continua. Suponga que los estudiantes son atendidos por una única persona y que la capacidad de la cola es únicamente de 9 estudiantes. Con esta información se desea calcular:**

**(1) La probabilidad que hayan 0 estudiantes en la fila.**

**(2) Número de estudiantes en el sistema.**

**(3) Número de estudiantes en la cola.**

**(4) Tiempo de espera en la cola.**

**(5) Tiempo de espera en el sistema.**

**R/**

**Se tiene que:**

**L = 30 por día**

**M = 40 por día (8 horas dividido entre 12 minutos)**

**El factor de utilización:**

**r = L/M**

**r = 30/40**

**r = 3/4 = 0.75**

**(1) La probabilidad que hayan 0 estudiantes en la fila.**

**1-r**

**P0 = -----------**

**1 - r^(N+1)**

**1 - 0.75**

**P0 = --------------**

**1 - 0.75^(9+1)**

**P0 = 0.2649**

**(2) Número de estudiantes en el sistema.**

**/ r \ / (N+1) \* r^(N+1) \**

**Ls = ( ----- ) - ( --------------- )**

**\ 1 - r / \ 1 - r^(N+1) /**

**/ 0.75 \ / (9+1) \* 0.75^(9+1) \**

**Ls = ( --------- ) - ( ------------------ )**

**\ 1 - 0.75 / \ 1 - 0.75^(9+1) /**

**Ls = 2.4033 estudiantes**

**(3) Número de estudiantes en la cola.**

**Lq = Ls - r**

**Lq = 2.4033 - 0.75**

**Lq = 1.6533 estudiantes**

**(4) Tiempo de espera en la cola.**

**Wq = Lq / L**

**Wq = 1.6533 / 30**

**Wq = 0.0551 días**

**Wq = 0.4408 horas**

**Wq = 26.4480 minutos**

**Wq = 26 minutos 27 segs**

**(día laboral de 8 horas)**

**(5) Tiempo de espera en el sistema.**

**Ws = Ls / L**

**Ws = 2.4033 / 30**

**Ws = 0.0801 días**

**Ws = 0.6408 horas**

**Ws = 38.4480 minutos**

**Ws = 38 minutos 27 segundos**

**(día laboral de 8 horas)**

**15. Un Sistema M/M/S y +oo/FIFO.**

**================================**

**Este sistema corresponde a un sistema de colas donde los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson, el tiempo de servicio es exponencial. Se cuenta con "S" servidores, la cola es infinita y sigue un mecanismo FIFO de servicio.**

**Fórmulas:**

**Factor de Utilización:**

**r = L /(S\*M)**

**Probabilidad que haya 0 personas en la cola:**

**S-1**

**\_\_\_**

**1 / 1 (L/M)^S \ \ (L/M)^n**

**-- = ( --- \* ------- ) + / -------**

**P0 \ 1-r S! / /\_\_\_ n!**

**n=0**

**Cantidad de personas en la cola:**

**(L/M)^S r**

**Lq = P0 \* -------- \* --------**

**S! (1-r)^2**

**Cantidad de personas en el sistema:**

**Ls = Lq + (L/M)**

**Tiempo promedio de espera en la cola:**

**Wq = (1/L) \* Lq**

**Tiempo promedio de espera en el sistema:**

**Ws = Wq + (1/M)**

**16. Un Primer Ejemplo.**

**======================**

**Un restaurante cuenta con dos saloneros. Los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson a una tasa de 10 por hora. El tiempo de servicio para cada cliente es exponencial con una media de 4 minutos. Con esta información calcule:**

**(1) La probabilidad de tener que esperar por el servicio.**

**(2) El tiempo esperado que cada mesero estará ocioso.**

**R/**

**Este ejemplo corresponde a un sistema del tipo M/M/2, donde:**

**S = 2**

**L = 10 por hora**

**M = 15 por hora**

**r = L /(S\*M)**

**r = 10/(2\*15) = 1/3**

**(1) La probabilidad de tener que esperar por el servicio.**

**S-1**

**\_\_\_**

**1 / 1 (L/M)^S \ \ (L/M)^n**

**-- = ( --- \* ------- ) + / -------**

**P0 \ 1-r S! / /\_\_\_ n!**

**n=0**

**2-1**

**\_\_\_**

**1 / 1 (10/15)^2 \ \ (10/15)^n**

**-- = ( ------- \* --------- ) + / ---------**

**P0 \ 1 - 1/3 2! / /\_\_\_ n!**

**n=0**

**1 / 1 (10/15)^2 \ / (10/15)^0 (10/15)^1 \**

**-- = ( ------- \* --------- ) + ( --------- + --------- )**

**P0 \ 1 - 1/3 2! / \ 0! 1! /**

**1 / 1 \ / 2 \**

**-- = ( --- ) + ( 1 + --- )**

**P0 \ 3 / \ 3 /**

**1**

**-- = 2**

**P0**

**1**

**P0 = ---**

**2**

**P0 = 1/2 de probabilidad**

**P0 = 0.50 de probabilidad**

**(2) El tiempo esperado que cada mesero estará ocioso.**

**El tiempo ocioso es equivalente al factor de utilización menos 1, o equivalentemente el factor de no utilización.**

**1 - r = 1 - 1/3**

**1 - r = 2/3**

**1 - r = 0.6667 de probabilidad**

**17. Un Segundo Ejemplo.**

**=======================**

**Un pequeña sucursal bancaria cuenta con dos cajeros. El primer cajero se encarga únicamente de los depósitos y los retiros. El segundo cajero se encarga de éstas y las demás actividades, conocidas como plataforma de servicios. Los clientes llegan a cada caja con la misma distribución Poisson de 20 clientes por hora. Los tiempos de servicio también son equivalentes, con una tiempo promedio de 2 minutos por cliente.**

**Se desea estudiar el efecto que ambos cajeros atiendan como lo hacen ahora, de manera que existen dos filas independientes cada una con un cajero para atenderlos. O bien una sola fila para que ambos atiendan todos los servicios bancarios. Para ello se desea estimar el tiempo promedio que un cliente pasaría en la cola al utilizar ambos sistemas.**

**R/**

**Observe que el comportamiento que se desea estudiar corresponde a los dos modelos siguientes:**

**Caso I: Dos colas independientes con dos cajeros.**

**(L=20) ooooo --> S1 (M=30)**

**(L=20) ooooo --> S2 (M=30)**

**Caso II: Una cola única con dos cajeros.**

**.--> S1 M=30**

**(L=40) ooooo |**

**'--> S2 M=30**

**() Caso I**

**---------**

**Usando M/M/1 en el sistema.**

**L = 20 hora**

**M = 30 hora**

**L**

**Wq = ------**

**M(M-L)**

**20**

**Wq = ---------**

**30(30-20)**

**2**

**Wq = -- horas**

**30**

**Wq = 2/30 horas**

**Wq = 4 minutos**

**() Caso II.**

**-----------**

**Usando M/M/2 en el sistema.**

**S = 2**

**L = 40 por hora al unir las dos filas**

**M = 30 por hora**

**Factor de utilización:**

**r = L /(S\*M)**

**r = 40 /(2\*30)**

**r = 40 / 60**

**r = 2/3**

**Probabilidad que la cola esté vacía:**

**S-1**

**\_\_**

**1 / 1 (L/M)^S \ \ (L/M)^n**

**-- = ( --- \* ------- ) + / -------**

**P0 \ 1-r S! / /\_\_\_ n!**

**n=0**

**2-1**

**\_\_\_**

**1 / 1 (40/30)^2 \ \ (40/30)^n**

**-- = ( ------- \* --------- ) + / ---------**

**P0 \ 1 - 2/3 2! / /\_\_\_ n!**

**n=0**

**1 / 1 (40/30)^2 \ / (40/30)^0 (40/30)^1 \**

**-- = ( ------- \* --------- ) + ( --------- + --------- )**

**P0 \ 1 - 2/3 2! / \ 0! 1! /**

**1 / 8 \ / 4 \**

**-- = ( --- ) + ( 1 + --- )**

**P0 \ 3 / \ 3 /**

**1**

**-- = 5**

**P0**

**1**

**P0 = ---**

**5**

**P0 = 1/5**

**P0 = 0.20**

**Cantidad de clientes en la cola:**

**(L/M)^S r**

**Lq = P0 \* -------- \* --------**

**S! (1-r)^2**

**1 (40/30)^2 2/3**

**Lq = - \* --------- \* -----------**

**5 2! (1 - 2/3)^2**

**1 16 18**

**Lq = - \* -- \* --**

**5 18 3**

**16**

**Lq = --**

**15**

**Lq = 16/15 clientes**

**Lq = 1.0667 clientes**

**Tiempo promedio de espera en la cola:**

**Wq = (1/L) \* Lq**

**Wq = (1/40) \* (16/15)**

**Wq = 2/75 horas**

**Wq = 1 3/5 minutos**

**Wq = 1.6 minutos**

**Wq = 1 minuto y 36 segundos.**

**Por lo tanto se puede observar que en el sistema con dos colas y 2 servidores se tarda un promedio de 4 minutos en la fila, mientras que en el sistema con una cola única y 2 servidores se tarda un tiempo promedio de 1.60 minutos en el sistema.**

**Resultado Final:**

**------------------------------**

**2c/2s 1c/2s**

**------------------------------**

**Wq 4:00 1:36 min:segs**

**------------------------------**

**18. Un Sistema M/Ek/1 y +oo/FIFO.**

**================================**

**Es un sistema de colas donde los clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson pero el tiempo de servicio se comporta de acuerdo a una distribución Erlang-k. Cuenta con un servidor, la cola es infinita y se atienden FIFO a los miembros de la cola.**

**La distribución Erlang-k es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, la cual puede ser expresada como la suma de "k" variables exponenciales independientes e idénticamente distribuidas.**

**La distribución Erlang se suele representar como:**

**/ (u\*k)^k**

**f(x) = ( -------- \* x^(k-1) \* e^(-k\*m\*x) x>=0**

**\ (k-1)!**

**E(x) = 1/u**

**de(x) = (1 / sqrt(k)) \* (1 / u)**

**Además se tiene el siguiente resultado:**

**Sean T1,T2,..,Tk son k variables aleatorias independientes con una distribución exponencial idéntica, cuya media es 1/ku. Entonces la suma de ellas:**

**T = T1 + T2 + ... + Tk**

**Tiene una distribución Erlang con parámetros u y k.**

**O equivalente:**

**Si cada exponencial tiene media k\*u**

**La Erlang tiene una media u.**

**Este resultado indica que el tiempo requerido para realizar una secuencia de k tareas, tiene una distribución Erlang, siempre y cuando cada tarea individual tenga una distribución exponencial de iguales parámetros. Para encontrar el parámetro de la distribución Erlang se deben sumar los promedios de las distribuciones exponenciales.**

**Fórmulas.**

**Número promedio de clientes en la cola:**

**(1+k) L^2**

**Lq = ----- \* ------**

**(2\*k) M(M-L)**

**Tiempo promedio de espera en la cola:**

**(1+k) L**

**Wq = ----- \* ------**

**(2\*k) M(M-L)**

**Tiempo promedio en el sistema:**

**Ws = Wq + (1/M)**

**Número promedio de clientes en el sistema:**

**Ls = L \* Ws**

**19. Un Primer Ejemplo.**

**======================**

**El ingreso a una universidad consiste en 3 procesos que se deben completar de manera secuencial. Los estudiantes llegan a la oficina de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa de 25 por hora. El tiempo que se necesita para realizar cada proceso tiene una distribución exponencial y se atiende un estudiante cada 40 segundos, o equivalentemente cada 2/3 de minuto. Si hay un solo servidor para cada proceso, encuentre los siguientes datos.**

**(1) Número de estudiantes en la cola.**

**(2) Tiempo de espera en la cola.**

**(3) Tiempo de espera en el sistema.**

**(4) Número de estudiantes en el sistema.**

**R/**

**Se tiene 3 procesos:**

**k = 3**

**La entrada es Poisson:**

**L = 25**

**Para el cálculo de M del sistema, se atiende un estudiante cada 40 segundos por proceso.**

**1 estudiante cada 40 segundos por proceso.**

**Como son 3 procesos en total se tardará:**

**3 \* 40 segs = 120 segs = 2 minutos en total**

**Como el sistema atiende un estudiante cada 2 minutos, en una hora atenderá 30 estudiantes**

**M = 30**

**Se tiene la siguiente información:**

**k = 3 colas**

**L = 25 por hora**

**M = 30 por hora**

**El sistema que se desea modelar tiene las siguientes características.**

**L=25 M=30**

**ooooo --> S1 --> ooooo --> S2 --> ooooo --> S3 --> ooooo**

**(1) Número promedio de estudiantes en la cola.**

**(1+k) L^2**

**Lq = ----- \* ------**

**(2\*k) M(M-L)**

**(1+3) 25^2**

**Lq = ----- \* ---------**

**(2\*3) 30(30-25)**

**Lq = 2.7778 estudiantes**

**(2) Tiempo de espera en la cola.**

**(1+k) L**

**Wq = ----- \* ------**

**(2\*k) M(M-L)**

**(1+3) 25**

**Wq = ----- \* ---------**

**(2\*3) 30(30-25)**

**Wq = 1/9 hora**

**Wq = 6.6666... minutos**

**Wq = 6 minutos 40 segs**

**(3) Tiempo de espera en el sistema.**

**Ws = Wq + (1/M)**

**Ws = 1/9 + 1/30**

**Ws = 13/90 horas**

**Ws = 0.1444... horas**

**Ws = 8.6666... minutos**

**Ws = 8 minutos 40 segs**

**(4) Número de estudiantes en el sistema.**

**Ls = L \* Ws**

**Ls = 25 \* 13/90**

**Ls = 65/18**

**Ls = 3.6111 estudiantes**

**20. Un Segundo Ejemplo.**

**=======================**

**Para reparar un cierto tipo de máquinas se requieren de tres procesos que se realizan en secuencia uno tras otro. Las máquinas suelen descomponerse de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa de 1 máquina descompuesta cada 2 horas. Cada servidor exponencial tarda 6.6667 minutos para atender al cliente, o equivalentemente 20/3 minutos para atender al cliente, o equivalentemente, el tiempo que se requiere para realizar las tres fases de una máquina es de 20 minutos. Asumiendo que se tiene una única persona que repara las máquinas en cada uno de los tres procesos se desea calcular:**

**(1) Número esperado de máquinas en la cola.**

**(2) Tiempo de espera en la cola.**

**(3) Tiempo de espera en el sistema.**

**(4) Número de máquinas en el sistema.**

**R/**

**Se tienen tres procesos:**

**k = 3**

**Y una tasa de entrada de:**

**L = 0.50 por hora**

**Para el cálculo de M se tiene:**

**Cada servidor tarda 6.6667 minutos.**

**Al tener el sistema 3 fases, se tardará en total:**

**3 \* 6.6667 minutos = 20 minutos**

**Para completar el ciclo se tardan 20 minutos, o de manera equivalente se atienden 3 máquinas por hora.**

**M = 3 por hora**

**Se tiene la siguiente información:**

**k = 3**

**L = 0.50 por hora**

**M = 3.00 por hora**

**El sistema que se desea modelar tiene las siguientes características.**

**L=0.50 M=3**

**oooooo --> S1 --> ooooo --> S2 --> ooooo --> S3 --> ooooo**

**(1) Número esperado de máquinas en la cola.**

**(1+k) L^2**

**Lq = ----- \* ------**

**(2\*k) M(M-L)**

**(1+3) 0.50^2**

**Lq = ----- \* ---------**

**(2\*3) 3(3-0.50)**

**Lq = 1/45 máquinas**

**Lq = 0.0222... máquinas**

**(2) Tiempo de espera en la cola.**

**(1+k) L**

**Wq = ----- \* ------**

**(2\*k) M(M-L)**

**(1+3) 0.5**

**Wq = ----- \* --------**

**(2\*3) 3(3-0.5)**

**Wq = 2/45 horas**

**Wq = 0.0444... horas**

**Wq = 2.6666... minutos**

**Wq = 2 minutos 40 segs**

**(3) Tiempo de espera en el sistema.**

**Ws = Wq + (1/M)**

**Ws = 2/45 + 1/3**

**Ws = 17/45 horas**

**Ws = 0.3777... horas**

**Ws = 22.6666... minutos**

**Ws = 22 minutos 40 segs**

**(4) Número de máquinas en el sistema.**

**Ls = L \* Ws**

**Ls = 1/2 \* 17/45**

**Ls = 17/90 máquinas**

**Ls = 0.1888... máquinas**

**21. Un Sistema M/Ek/1 con k -> +oo.**

**===================================**

**Conforme k tiende hacia infinito, las expresiones de las fórmulas se reducen. Una segunda consecuencia de tener un número infinito de servidores es que todos los clientes tardan un tiempo constante en pasar por ellos.**

**Por lo tanto, para sistemas de cola con tiempos constantes de servicio se presentan un nuevo conjunto de fórmulas. Un tiempo constante es un tiempo que no tiene variación y por lo tanto es siempre igual para todos los clientes.**

**Número promedio de clientes en la cola:**

**L^2**

**Lq = ---------**

**2\*M\*(M-L)**

**Tiempo promedio de espera en la cola:**

**L**

**Wq = ---------**

**2\*M\*(M-L)**

**Tiempo promedio en el sistema:**

**Ws = Wq + 1/M**

**Número promedio de clientes en el sistema:**

**Ls = Lq + L/M**

**22. Un Primer Ejemplo.**

**======================**

**En un aeropuerto los aviones llegan al lugar de acuerdo a una distribución Poisson a una tasa de 6 por hora. Una vez que se ha dado la señal de aterrizaje se necesitan exactamente 6 minutos para aterrizar un avión. Esto produce algunos retrasos en los aterrizajes de los vuelos lo que puede ser peligroso y costoso. Bajo estas circunstancias, cuánto tiempo debe esperar un avión circulando alrededor del aeropuerto para poder aterrizar.**

**R/**

**Se tiene la información**

**L = 6 por hora**

**M = 10 por hora tasa constante, sin variación.**

**Por lo tanto:**

**L**

**Wq = ---------**

**2\*M\*(M-L)**

**6**

**Wq = -----------**

**2\*10\*(10-6)**

**Wq = 3/40 horas**

**Wq = 4.50 minutos**

**Wq = 4 minutos 30 segs**

**23. Resumen.**

**============**

**Las filas y las líneas de espera constituyen un elemento esencial de las sociedades modernas. Se hacen filas en los bancos, trabajos, restaurantes, etc. La razón por la que se generan las líneas de espera es que los clientes que ingresan a un sistema no pueden ser atendidos de inmediato, de ser así los costos del sistema se elevarían considerablemente pues se necesitaría de un gran número de servidores para lograr atender de inmediato a cualquier cliente que ingrese.**

**Los sistemas de colas se pueden aplicar en decisiones donde se desea disminuir el tamaño de una fila y el tiempo de espera de los clientes, pero a la vez manteniendo los costos lo más bajo posibles.**

**En el presente capítulo se han presentado sistemas de colas para modelos de entrada Poisson y salida exponencial con 1 o varios servidores. Con colas finitas e infinitas. También se analizaron los sistemas los sistemas con tiempo de servicio Erlang que son útiles cuando se tienen un grupo de servidores alineados de forma secuencial o bien con tiempos constantes de atención.**

**+++**

**24. Ejercicios.**

**===============**

**() Ejercicio 1.**

**Responda a cada una de las siguientes preguntas.**

**(a) Qué se entiende por una cola.**

**(b) Explique los rasgos principales de las colas.**

**(c) Indique los supuestos principales para el modelado de colas.**

**(d) Cuáles son las principales distribuciones de llegada y salida que se utilizan.**

**() Ejercicio 2.**

**A continuación se presentan unas fórmulas alternativas para el modelo M/M/1 que son equivalentes a las presentadas. Para ello tome los ejemplos presentados de este modelo y calcule de nuevo los valores utilizando las nuevas fórmulas para verificar que se obtienen los mismos resultados.**

**p = L/M**

**P0 = 1 - p**

**Lq = p^2 / (1 -p)**

**Ls = L \* Ws**

**Wq = Lq / L**

**Ws = Wq + (1/M)**

**() Ejercicio 3.**

**En una oficina del gobierno los estudiantes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa de 30 por hora. El tiempo requerido para atenderlos sigue una distribución exponencial con una media de 40 por hora. Si las personas son atendidas por un único servidor, encuentre el tiempo promedio de una persona en la cola y en el sistema.**

**() Ejercicio 4.**

**Una pequeña peluquería cuenta con solamente un barbero. Usualmente le toma 30 minutos para realizar un corte de pelo. Los clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson, con una tasa de 1 cada 40 minutos. Se desea saber cuánto tiempo debe esperar un cliente antes de ser atendido y cuánto tiempo demorará desde que entra hasta que sale de la peluquería.**

**() Ejercicio 5.**

**En el banco BNP existe un sola ventanilla para el autoservicio. La ventana permanece abierta de 10:00 am hasta 5:00 pm. Se sabe que el número promedio de clientes que ingresan durante el día son 54 y que el tiempo promedio para atender un cliente es de 5 minutos. Se desea calcular:**

**(a) El número promedio de clientes en la cola.**

**(b) El número promedio de clientes en el sistema.**

**(c) El tiempo promedio de espera para ser atendido.**

**(d) El tiempo promedio de espera en el sistema.**

**() Ejercicio 6.**

**En un establecimiento de cine los clientes llegan a comprar sus tiquetes de acuerdo a una distribución Poisson con una media de 30 personas por hora. Existe una única ventanilla para la venta de tiquetes. El tiempo que se requiere para atender a un comprador tiene una distribución exponencial con una media de 90 segundos. Para este problema encuentre los valores de P0, Lq, Ls, Wq, Ws.**

**() Ejercicio 7.**

**En una clínica del lado este de la ciudad se ha descubierto que los pacientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson con una tasa de 25 pacientes por hora. Desafortunadamente en la sala no caben más que 14 pacientes. El tiempo que se tarda en diagnosticar a un paciete sigue una distribución exponencial con una media de 35 pacientes por hora.**

**(a) Encuentre la tasa efectiva de llegadas a la clínica.**

**(b) Cuál es la probabilidad que un paciente que llegue a la clínica y no tenga que esperar.**

**(c) Cuál es el tiempo de espera para que un paciente salga de la clínica.**

**() Ejercicio 8.**

**En una estación de trenes el vendedor de tiquetes necesita en promedio de 10 minutos para atender a un cliente. Los clientes llegan al sistema de acuerdo a una distribución Poisson con una tasa de 4 por hora. Encuentre los siguientes datos:**

**(a) Largo promedio de la cola.**

**(b) Tiempo de espera de un cliente en la cola.**

**(c) Tiempo total que un cliente pasa en el sistema.**

**() Ejercicio 9.**

**Un banco está considerando montar un sistema de autobanco para atención al cliente. La gerencia estima que los clientes llegarán a una tasa de 12 por hora. Asímismo se considera que el cajero que trabajará en el autobanco puede atender un cliente cada 3 minutos. Asumiendo que las llegadas se comportan de forma Poisson y que el tiempo de servicio es exponencial encuentre lo siguiente.**

**(a) Número promedio de personas en la cola.**

**(b) Número promedio de personas en el sistema.**

**(c) Tiempo promedio de espera en la cola.**

**(d) Tiempo promedio de espera en el sistema.**

**() Ejercicio 10.**

**Una compañía de fertilizantes distribuye sus productos en camiones los cuales deben ser cargados en una bodega. Los camiones llegan a la bodega a una tasa de 10 por hora y el tiempo promedio para cargar un camión es de 5 minutos. Determine lo siguiente.**

**(a) La probabilidad que el camión tenga que esperar.**

**(b) El tiempo de espera promedio de un camión en la cola.**

**() Ejercicio 11.**

**Una compañía de transportes tiene un cajero en servicio todo el tiempo. El maneja la información de los horarios de los buses y realiza las reservaciones. Los clientes llegan a una tasa de 6 por hora y el cajero puede atender 10 clientes por hora. Se solicita.**

**(a) Número promedio de clientes que esperan ser atendidos.**

**(b) El tiempo promedio que un cliente tarda en ser atendido.**

**(c) El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema.**

**() Ejercicio 12.**

**Una cadena de cines acaba de iniciar la proyección de una nueva película. En su cine más exclusivo cuentan con una sola ventanilla para la venta de tiquetes. Los clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson con una entrada promedio de 20 por hora. El tiempo que se requiere para atender a un cliente tiene una distribución exponencial con una media de 90 segundos. Encuentre el tiempo promedio que un cliente tarda en comprar llegar a la ventanilla de tiquetes.**

**() Ejercicio 13. \***

**Una cadena de comidas rápidas cuenta con dos filas independientes, cada una de ellas con un cajero para atender los pedidos. Cada cajero realiza la misma labor. Los clientes llegan a cada fila con una distribución Poisson de 15 clientes por hora. Los tiempos de servicio también son equivalentes con un tiempo promedio de 1.5 minutos por cliente.**

**Se desea estudiar el efecto que ambos cajeros atiendan como lo hacen ahora, de manera que existen dos filas independientes cada una con un cajero para atenderlos. O bien una sola fila para que ambos atiendan todos los servicios de pedidos de comida.**

**Para ello se desea estimar el tiempo promedio que un cliente pasaría en la cola al utilizar ambos sistemas.**

**() Ejercicio 14.**

**Una sucursal de un supermercado cuenta con dos cajeros independientes para que los clientes puedan pagar. Ambos cajeros realizan la misma labor. Los clientes llegan a la fila con una distribución Poisson de 10 por hora. El tiempo de servicio de cada cajero sigue una distribución exponencial y atienden un cliente cada 3 minutos.**

**Se desea estudiar el efecto que ambos cajeros atiendan como lo hacen ahora, de manera que existen dos filas independientes cada una con un cajero para atenderlos. O bien una sola fila para que ambos atiendan todos los servicios de pedidos de comida.**

**Para ello se desea estimar el tiempo promedio que un cliente pasaría en la cola al utilizar ambos sistemas.**

**() Ejercicio 15.**

**Para recibir un permiso municipal se requieren de 4 procesos que se realizan en secuencia uno tras otro. Los clientes suelen llegar de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa de 4 clientes por hora. Cada servidor exponencial tarda 3 minutos para atender al cliente. En cada proceso hay una única persona que atiende a los clientes. Con base en esta información calcule:**

**(a) Número esperado de personas en la cola.**

**(b) Tiempo de espera en la cola.**

**(c) Tiempo de espera en el sistema.**

**(d) Número de personas en el sistema.**

**() Ejercicio 16.**

**Para un trámite bancario se requiere de 3 procesos que se realizan en secuencia uno tras otro. Los clientes suelen llegar de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa de 10 clientes por hora. Cada servidor exponecial tarda 1 minuto para atenEn cada proceso hay una única persona que atiende a los clientes. Asumiendo que se tiene una única persona que atiende a los clientes. Se desea calcular:**

**(a) Número esperado de personas en la cola.**

**(b) Tiempo de espera en la cola.**

**(c) Tiempo de espera en el sistema.**

**(d) Número de personas en el sistema.**